# Grupa permutacija

<u>Definicija</u> (permutacija skupa $A$, grupa permutacija skupa $A$)

Permutacija skupa $A$ je bijekcija sa $A$ na $A$.

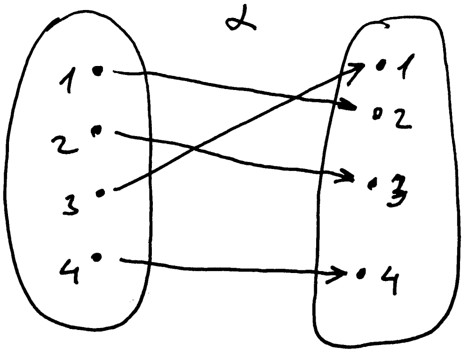
Skup svih permutacija skupa $A$ formira grupu u odnosu na operaciju kompozicije f-ja. Ovu grupu nazivamo grupa permutacija skupa $A$.

\# Dati jedan primjer permutacije skupa $\{1,2,3,4\}$. Dobijenu permutaciju $\alpha$ napisati i u red obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) \end{pmatrix}.$$

Rj. Permutaciju $\alpha$ skupa $\{1,2,3,4\}$ možemo definisati stavljajući

$$\alpha(1)=2, \quad \alpha(2)=3, \quad \alpha(3)=1, \quad \alpha(4)=4$$



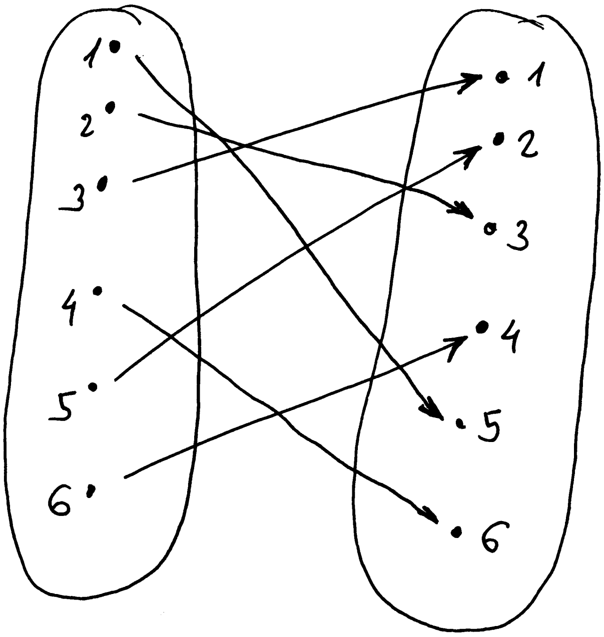

Ovu permutaciju $\alpha$ možemo zapisati i ovako

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(#) Permutaciju $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ prikazati grafički (pomoću Veneovog dijagrama), i izračunati $\beta(3)$, $\beta(5)$ i $\beta(6)$.

Rj:

$\beta$



$\beta(3) = 1$

$\beta(5) = 2$

$\beta(6) = 4.$

(#) Date su permutacije $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ i $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ skupa $\{1,2,3,4,5\}$. Izračunati $\gamma\sigma$ i $\sigma\gamma$.

Rj:

$$\gamma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Definicija (simetrična grupa $S_n$)

Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ se naziva simetrična grupa reda $n$ i označava sa $S_n$. Elementi grupe $S_n$ imaju oblik

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

# Napisati sve elemente grupe $S_3$. Da li je $S_3$ Abelova grupa.

Rj.

Skup $S_3$ označava skup svih bijekcija skupa $\{1,2,3\}$ na samoga sebe.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupa $S_3$ je reda 6. $\quad S_3 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$.

Primjetimo da je $\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2\beta \neq \alpha\beta$,

pa $S_3$ nije abelova grupa.

(#) Dati su elementi $a, b, c \in S_4$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti red grupe $\langle a, b, c \rangle$.

Rj.

Primijetimo da je

$$a^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b^2 = e$$

$$c^2 = e$$

$$ab = c, \quad bc = a, \quad ca = b$$

$$ac = b, \quad ba = c, \quad cb = a$$

$$\langle a, b, c \rangle = \{ e, a, b, c \}$$

$$|\langle a, b, c \rangle| = 4$$

(#) Odrediti red grupe $S_n$.

Rj.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

postoji $n$ izbora za $\alpha(1)$

jednom kad smo izabrali $\alpha(1)$, preostalo je $n-1$ mogućnosti za $\alpha(2)$ (kako je $\alpha$ 1-1, to moramo imati $\alpha(1) \neq \alpha(2)$)

poslije izbora $\alpha(2)$, postoji tačno $n-2$ mogućnosti za $\alpha(3)$

Nastavljajući na ovaj način vidimo da $S_n$ ima

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ elemenata

Definicija (ciklus)

Neka je $\sigma \in S_n$. Ako postoji niz $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ takav da je

$$\sigma(x_i) = x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1),$$
$$\sigma(x_r) = x_1,$$
$$\sigma(x) = x \quad (x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}),$$

tada se permutacija $\sigma$ označava sa $(x_1\ x_2\ \dots\ x_{r-1}\ x_r)$ i naziva ciklus dužine $r$. Ciklus dužine dva zove se transpozicija.

Dva ciklusa $(a_1\ a_2\ \dots\ a_r)$ i $(b_1\ b_2\ \dots\ b_s)$ su disjunktna ako i samo ako su skupovi $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ i $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ disjunktni.

(#) Permutacije $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ i $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ napisati u obliku ciklusa pa izračunati $\alpha\beta$.

Rj.

$\alpha = (1\ 2)(4\ 5)$

$\beta = (1\ 5\ 3)(2\ 4)$

$\alpha\beta = (1\ 4)(2\ 5\ 3)$

(#) Permutaciju $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ napisati u obliku ciklusa (u cikličkoj notaciji).

Rj.

$\varepsilon = (5)$ ili $\varepsilon = (1)$ ili ...

(#) Neka su

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad i \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) $\alpha$ i $\beta$ napisati kao proizvod disjunktnih ciklusa

(b) $\alpha$ i $\beta$ napisati kao proizvod 2-ciklusa

(c) odrediti $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$, $\alpha^{554}$ i $\beta^{455}$.

Rj.:

(a) $\alpha = (1\,2)(4\,5)(6\,7)$

$\beta = (2\,3\,8\,4\,7)(5\,6)$

(b) $\alpha = (1\,2)(4\,5)(6\,7)$

$\beta = (2\,3\,8\,4\,7)(5\,6) = (2\,7)(2\,4)(2\,8)(2\,3)(5\,6)$

(c) $\alpha^{-1} = (6\,7)(4\,5)(1\,2)$

$\beta^{-1} = (5\,6)(2\,3)(2\,8)(2\,4)(2\,7)$ ili

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Primjetimo da $\alpha^2 = (1)(2)(4)(5)(6)(7) = id$

$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = \alpha$

$\alpha^4 = \alpha^2 \cdot \alpha^2 = id \quad \Rightarrow \quad \alpha^{554} = id = e = (1\,2)(1\,2)$

$\beta^2 = (2\,8\,7\,3\,4)(5)(6)$

$\beta^3 = (2\,4\,3\,7\,8)(5\,6)$

$\beta^4 = (2\,7\,4\,8\,3)(5)(6)$

$\beta^5 = (2)(3)(4)(8)(7)(5\,6)$

$\beta^{10} = id = e$

$\beta^{455} = \beta^{450} \cdot \beta^5 = (2)(3)(8)(4)(7)(5\,6)$

$= (5\,6)$

(#) Permutacije $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ i

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ napisati u obliku ciklusa.

Odrediti $\alpha^{-1}$ i $\beta^{-1}$.

Rj. $\alpha = (1\ 2)(3\ 4\ 6)$

$\beta = (1\ 5\ 2\ 3)(4\ 6)$

$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\alpha^{-1} = (6\,4\,3)(1\,2)$

$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\beta^{-1} = (4\,6)(3\,2\,5\,1)$

(#) Data su dva elementa grupe $S_8$, $\alpha = (1\,3)(2\,7)(4\,5\,6)(8)$ i $\beta = (1\,2\,3\,7)(6\,4\,8)(5)$. Proizvod $\alpha\beta$ napisati u obliku disjunktnih ciklusa. Odrediti $(\alpha\beta)^{-1}$.

Rj.

$\alpha\beta = (1\,3)(2\,7)(4\,5\,6)(8)(1\ 2\ 3\ 7)(6\,4\,8)(5)$

| | |
|---|---|
| $1 \to 2 \to 7$ | $5 \to 6$ |
| $2 \to 3 \to 1$ | $6 \to 4 \to 5$ |
| $3 \to 7 \to 2$ | $7 \to 1 \to 3$ |
| $4 \to 8$ | $8 \to 6 \to 4$ |

$\alpha\beta = (1\ 7\ 3\ 2)(4\ 8)(5\ 6)$

$(\alpha\beta)^{-1} = (5\,6)(4\,8)(2\ 3\ 7\ 1)$

(#) Pokazati da se svaka permutacija konačnog skupa može napisati kao ciklus ili kao proizvod disjunktnih ciklusa.

Rj: Neka je $\alpha$ permutacija skupa $A=\{1,2,\dots,n\}$. Da bi $\alpha$ napisali u obliku disjunktnih ciklusa, započećemo tako što ćemo izabrati proizvoljan element $a_1 \in A$ i napraviti

$$a_2 = \alpha(a_1)$$
$$a_3 = \alpha(a_2) = \alpha^2(a_1)$$
$$a_4 = \alpha(a_3) = \alpha^3(a_1)$$
$$\vdots$$

i tako dalje sve dok ne dođemo do elementa $a_1 = \alpha^m(a_1)$ za neko $m$. Ovakvo $m$ mora postojati zato što niz

$a_1, \alpha(a_1), \alpha^2(a_1), \alpha^3(a_1), \dots$ mora biti konačan;

Kako je ovaj niz konačan, moraju se pojaviti dva elementa koja se ponavljaju, recimo $\alpha^i(a_1) = \alpha^j(a_1)$ za neke $i, j$ $(i<j)$. Tada je $a_1 = \alpha^m(a_1)$ gdje je $m = j-i$. Ovu relaciju između $a_1, a_2, \dots, a_m$ možemo napisati kao

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m) \dots$$

gdje tri tačke predstavljaju mogućnost da možda nismo iskoristili sve elemente skupa $A$ u gornjem procesu. U tom slučaju, izabraćemo novi element $b_1$ skupa $A$ koji se nije pojavio u prvom ciklusu, i pomoću njega na isti način proizvesti novi ciklus. Tj stavimo

$b_2 = \alpha(b_1)$

$b_3 = \alpha(b_2) = \alpha^2(b_1)$

$b_4 = \alpha(b_3) = \alpha^3(b_1)$

$\vdots$

sve dok ne dođemo ponovo do elementa $b_1 = \alpha^k(b_1)$ za neki $k$.

Ovaj novi ciklus nema zajedničkih elemenata sa prethodnim ciklusom, s obzirom da, ako bi postojali neki $i, j$ za koje vrijedi da je $\alpha^i(a_1) = \alpha^j(b_1)$ dobili bi da je $\alpha^{i-j}(a_1) = b_1$, a time i $b_1 = a_t$ za neko $t$

#kontradikcija
(b₁ smo izabrali tako da je različit od svih $a_i$-jeva)

Nastavljajući ovaj proces, s obzirom da je $A$ konačan skup, iskoristićemo sve elemente iz $A$ i naša permutacija će biti oblika

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)(b_1, b_2, \dots, b_k) \dots (c_1, c_2, \dots, c_s).$$

Na ovaj način, vidimo da se svaka permutacija može napisati kao proizvod disjunktnih ciklusa.

(#) Pokazati da ako par ciklusa $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_m)$ i $\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ nema zajednički element da je tada $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Rj. Zbog određenosti, recimo da su $\alpha$ i $\beta$ permutacije skupa

$$S=\{a_1,a_2,\dots,a_m,b_1,b_2,\dots,b_n,c_1,c_2,\dots,c_k\}$$

gdje su c-ovi elementi od $S$ koji ostaju fiksirani i od permutacije $\alpha$ i od permutacije $\beta$. (možda ne postoji - može se desiti da ne postoji ni jedan od ovih c-jeva)

Da bi pokazali da je $\alpha\beta=\beta\alpha$, moramo dokazati da je $(\alpha\beta)(x)=$
$=(\beta\alpha)(x)$ za sve $x\in S$.

Ako je $x$ jedan od a elemenata, recimo $a_i$, tada

$$(\alpha\beta)(a_i)=\alpha(\beta(a_i))=\alpha(a_i)=a_{i+1}$$

s obzirom da $\beta$ fiksira sve a elemente (tumačimo da je $a_{i+1}$ u stvari $a_1$ ako je $i=m$). Iz istog razloga

$$(\beta\alpha)(a_i)=\beta(\alpha(a_i))=\beta(a_{i+1})=a_{i+1}.$$

Prema tome f-je $\alpha\beta$ i $\beta\alpha$ se poklapaju za sve a elemente.
Sličan argument pokazuje da se $\alpha\beta$ i $\beta\alpha$ poklapaju (slažu) na svim b elementima.

Na kraju pretpostavimo da je $x$ neki od c elemenata, recimo $c_i$. Tada, s obzirom da obe permutacije $\alpha$ i $\beta$ fiksiraju c elemente, imamo da

$$(\alpha\beta)(c_i)=\alpha(\beta(c_i))=\alpha(c_i)=c_i$$

i

$$(\beta\alpha)(c_i)=\beta(\alpha(c_i))=\beta(c_i)=c_i.$$

Time smo dokazali datu tvrdnju, a time i rješili zadatak.

# Neka je $S_n$ simetrična grupa. Identitet $e \in S_n$ napisati kao proizvod ciklusa dužine 2 (kao proizvod 2-ciklusa).

Rj.:

$$\varepsilon = (12)(12)$$

# Permutacije $(12345)$ i $(1632)(457)$ napisati kao proizvod 2-ciklusa.

Rj.:

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2).$$

$$(1632)(4\,5\,7) = (1\,2)(1\,3)(1\,6)(4\,7)(4\,5).$$

\# Neka su $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ i

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Napisati $\alpha$, $\beta$ i $\alpha\beta$ kao

(a) proizvod disjunktnih ciklusa.

(b) proizvod 2-ciklusa

Rj.

(a) $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)$

$\beta = (2\ 3\ 8\ 4\ 7)(5\ 6)$

$\alpha\beta = (1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 7\ 3\ 6)$

(b)

$\alpha = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(6\ 8)(6\ 7)$

$\beta = (2\ 7)(2\ 4)(2\ 8)(2\ 3)(5\ 6)$

$\alpha\beta = (1\ 6)(1\ 3)(1\ 7)(1\ 5)(1\ 8)(1\ 4)(1\ 2)$

(#) Pokazati da se svaka permutacija u $S_n$ $(n>1)$ može napisati kao proizvod ciklusa dužine 2 (kao proizvod 2-ciklusa)

Rj. Prvo primjetimo da se identitet može napisati kao $(12)(12)$ pa je proizvod 2-ciklusa. Prema jednom od prethodnih zadataka znamo da se svaka permutacija može napisati u obliku

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)(b_1, b_2, \dots, b_t)\dots(c_1, c_2, \dots, c_s)$$

Direktno računanje nam pokazuje da je ova permutacija ista kao i

$$(a_1 a_k)(a_1 a_{k-1})\dots(a_1 a_2)(b_1 b_t)(b_1 b_{t-1})\dots(b_1 b_2)\dots$$
$$\dots(c_1 c_s)(c_1 c_{s-1})\dots(c_1 c_2)$$

Time smo riješili dati problem.

## Lema

Neka je $\varepsilon$ identitet grupe $S_n$. Ako je $\varepsilon = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$, gdje su $\beta$-te 2-ciklusi, tada je $r$ parno.

## # Dokazati lemu iznad.

dokaz:

Jasno je da $r \neq 1$, s obzirom da 2-ciklus nije identitet. Ako je $r=2$ lema je dokazana. Pa pretpostavimo da je $r>2$, i dokaz ćemo izvršiti indukcijom.

Pretpostavimo da je desni-zadnji 2-ciklus $(ab)$. Tada, kako je $(ij)=(ji)$ proizvod $\beta_{r-1}\beta_r$ se može napisati u jednom od sljedećih oblika, prikazanih na desnoj strani:

$$\varepsilon = (ab)(ab),$$
$$(ab)(bc) = (ac)(ab),$$
$$(ac)(cb) = (bc)(ab),$$
$$(ab)(cd) = (cd)(ab)$$

(u zavisnosti da li je $\beta_{r-1}=(ab)$ ili $\beta_{r-1}=(ac)$ ili $\beta_{r-1}=(bc)$ ili $\beta_{r-1}=(cd)$.

Ako se prvi slučaj pojavi, možemo izbrisati $\beta_{r-1}\beta_r$ iz orginalnog proizvoda i dobiti $\varepsilon=\beta_1\beta_2\ldots\beta_{r-2}$, a time, principom matematičke indukcije, zaključiti da je $r-2$ parno...

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

Uputa: ZA BOLJE RAZUMIJEVANJE: Pokušati pokazati šta će se desiti u slučaju kada je $r=3$.

(#) Neka je $\alpha$ data permutacija. Ako je

$$\alpha = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r \qquad i \qquad \alpha = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s$$

gdje su $\beta$-te i $\gamma$-~~te~~ 2-ciklusi, pokazati da su oba broja $r$ i $s$ parna, ili oba neparna.

Rj.

Primjetimo da $\beta_1\beta_2\ldots\beta_r = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s$ povlači

$$\varepsilon = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s\beta_r^{-1}\beta_{r-1}^{-1}\ldots\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}$$

$$= \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s\beta_r\ldots\beta_2\beta_1$$

S obzirom da je 2-ciklus sam svoj inverz.

Sada nam prethodna Lema garantuje da je $s+r$ parno, a odavde slijedi da su oba ova broja ili parna ili neparna.

<u>Definicija</u> (parna i neparna permutacija)

Permutaciju $\alpha \in S_n$ nazivamo parna ako se može napisati kao proizvod parnog broja transpozicija (tj. ciklusa oblika $(i\ j)$). Permutacija $\alpha \in S_n$ se naziva neparna ako nije parna.

(#) Ako je $\alpha$ parna permutacija, pokazati da je $\alpha^{-1}$ također parna. Ako je $\alpha$ neparna, pokazati da je $\alpha^{-1}$ neparna.

Rj.

Permutaciju $\alpha$ napišimo kao proizvod 2-ciklusa

$$\alpha = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$$

Permutacija $\alpha$ je parna ako i samo ako je $m$ parno.
Sad imamo da

$$\alpha^{-1} = (\tau_1 \tau_2 \dots \tau_m)^{-1} = \tau_m^{-1} \dots \tau_2^{-1} \tau_1^{-1}$$

Primjetimo da za proizvoljan 2-ciklus $\tau$, vrijedi

$$\tau^{-1} = \tau$$

Pa je $\alpha^{-1} = \tau_m \dots \tau_2 \tau_1$

Ako je $m$ parno zadnji izraz pokazuje da je $\alpha^{-1}$ parno
Ako je $m$ neparno zadnji izraz pokazuje da je $\alpha^{-1}$ neparna permutacija.

(#) Neka je $A_n$ skup svih parnih permutacija iz grupe $S_n$. Pokazati da je $A_n$ grupa u odnosu na operaciju kompozicije. (tj. u odnosu na operaciju koja je naslijeđena iz $S_n$).

Rj:

SKUP $A_n$ JE ZATVOREN U ODNOSU NA OPERACIJU KOMPOZICIJE

Izaberimo dvije proizvoljne permutacije $\alpha$ i $\beta$ iz $A_n$. Ako se $\alpha$ može napisati kao proizvod parnog broja $n$ 2-ciklusa i ako se $\beta$ može napisati kao proizvod parnog broja $m$ 2-ciklusa, tada se proizvod $\alpha\beta$ može napisati kao proizvod od $n+m$ 2-ciklusa i $n+m$ je paran broj. Time je kompozicija zaista binarna operacija na $A_n$.

OPERACIJA KOMPOZICIJE JE ASOCIJATIVNA

Asocijativnost slijedi zato što je kompozicija f-ja uvijek asocijativna.

POSTOJI JEDINIČNI ELEMENT

Identitet $e=(12)(12)$ se može napisati kao paran broj ciklusa dužine dva, a time $e \in A_n$.

SVAKI ELEMENT IMA INVERZ

Pretpostavimo da je permutacija $\alpha$ oblika $\alpha=(ab)(cd)\dots(wx)$ gdje postoji paran broj transpozicija. Kako je $\alpha^{-1}=(wx)\dots(cd)(ab)$ to se $\alpha^{-1}$ može također napisati kao paran broj transpozicija.

Time smo pokazali da je $A_n$ grupa.

Definicija (alternativna grupa reda n)

Grupa parnih permutacija od n elemenata označavamo sa $A_n$ i nazivamo alternativna grupa reda n.

(#) Da li neparne permutacije iz $S_n$ formiraju grupu? Obrazložiti svoj odgovor.

Rj.

Ne.

Identitet je parna permutacija pa nemože pripadati skupu neparnih permutacija.

Također proizvod dvije neparne permutacije mora biti parna.

(#) Pokazati da se permutacija $(1234)$ ne može napisati kao proizvod 3-ciklusa (kao proizvod ciklusa dužine 3).

Rj.

Ciklus dužine $m$ je paran ako je $m$ paran i neparan ako je $m$ paran.

$(1234)$ je neparna permutacija $((1234)=(14)(13)(12))$ i svaki tri-ciklus je parna permutacija.

Kako je proizvod parnih permutacija parna, imamo da je proizvod tri ciklusa parno a time ne može biti jednako $(1234)$.

(#) Pronaći sve elemente grupa $A_2$, $A_3$ i $A_4$. Da li je i jedna od ovih grupa Abelova.

Rj. (i) Posmatrajmo $A_2$.

U ovom slučaju $S_2 = \{e, (12)\}$, a time je $A_2 = \{e\}$.

Ova grupa je Abelova (nemamo ništa što treba provjeriti).

(ii) Posmatrajmo $A_3$.

Sad imamo da je $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

Time je $A_3 = \{e, (123), (132)\}$ (s obzirom da je $(123) = (13)(12)$ i $(132) = (12)(13)$). Ova grupa je također Abelova s obzirom da je $(123)(132) = e = (132)(123)$ (primjetimo da za bilo koje $\alpha \in A_3$, $\alpha e = \alpha = e\alpha$, kao i $\alpha\alpha = \alpha^2 = \alpha\alpha$).

(iii) Posmatrajmo $A_4$.

Nećemo napisati elemente grupe $S_4$, nego ćemo primijetiti da bilo koji $n$-ciklus je paran ako i samo ako je broj $n-1$ paran. Npr. primjetimo da permutaciju $(12\ldots n)$ možemo napisati kao $(1n)(1\,n{-}1)\ldots(12)$ tj. kao proizvod $n-1$ transpozicija. Time je $A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (143), (134), (234), (243)\}$. Ova grupa nije Abelova s obzirom da $(123)(124) = (13)(24)$ ali $(124)(123) = (14)(23)$.

(#) Odrediti i dokazati formulu za broj elemenata grupe $A_n$.

Rj. Za početak posmatrajmo grupe $A_2$, $A_3$ i $A_4$. Primjetimo da je $|A_2|=1$, $|A_3|=3$ i $|A_4|=12$. S druge strane $|S_2|=2!=2$, $|S_3|=3!=6$ i $|S_4|=4!=24$. Možemo pretpostaviti da je formula za broj elemenata od $A_n$ $\frac{n!}{2}$. Pokažimo da je ova formula tačna.

Neka je $B_n = S_n \setminus A_n$ (primjetimo da ovako definisan $B_n$ je u stvari skup svih neparnih permutacija). Dovoljno je da pokažemo da je $B_n$ iste veličine kao i $A_n$, zato što to povlači da je broj elemenata od $A_n$ jednak broju elemenata od $S_n$ podjeljeno sa 2, ili $\frac{n!}{2}$.

Posmatrajmo f-ju $\phi: A_n \to B_n$ definisanu pravilom $\phi(\alpha)=(12)\alpha$. Pokazaćemo da je $\phi$ bijekcija i time dobiti rješenje zadatka.

$\phi$ JE INJEKCIJA

Neka je $\phi(\alpha)=\phi(\beta) \Rightarrow (12)\alpha=(12)\beta \Rightarrow (12)(12)\alpha=(12)(12)\beta$
$\Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow \phi$ je injekcija

$\phi$ JE SURJEKCIJA

Neka je $\gamma \in B_n$ proizvoljna permutacija. Kako je $\gamma$ neparna permutacija to je $(12)\gamma$ parna. Ali primjetimo sad da je $\phi((12)\gamma)=(12)(12)\gamma=\gamma$ a time je i $\phi$ zaista surjekcija.

Prema tome $\phi$ je bijekcija, čime smo riješili zadatak.

(#) Pokazati da permutacija neparnog reda uvijek mora biti parna permutacija. (Drugim riječima pokazati da ako $\alpha \in S_n$ ima neparan red, tada $\alpha \in A_n$).

Rj.: Pretpostavimo da je $\alpha^{2n+1} = e$ za neki cijeli $n$.

Napišimo $\alpha$ kao proizvod $m$ transpozicija.

Sad ako izračunamo $\alpha^{2n+1}$ dobićemo da je proizvod od $m(2n+1)$ transpozicija jednak jedinici $e$.

Ali kao što znamo $e$ se jedino može napisati kao proizvod parnog broja transpozicija. Time je $m(2n+1)$ paran broj a to je jedino moguće ako je $m$ također paran.

Prema tome $\alpha$ je parna permutacija.

(#) Pokazati da je f-ja sa konačnog skupa $S$ na sebe jedan-na-jedan ako i samo ako je na. Da li je to tačno ako je $S$ beskonačan skup?

R: Dokazaćemo malo jaču tvrdnju: Neka su $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ i $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ i neka je $f: S \to T$. Tada je $f$ jedan-na-jedan ako i samo ako je na.

Ovu tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po veličini skupova $S$ i $T$.

Za $n=1$, $S=\{s_1\}$ i $T=\{t_1\}$. Jasno je da $f: s_1 \to t_1$ je 1-1 i na. Time je naša tvrdnja tačna za bazni korak $n=1$.

Sad pretpostavimo da je naša tvrdnja tačna za skupove veličina $1, 2, \dots, k-1$ i pokažimo da mora biti tačna za $k$.

Pa neka su $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ i neka je $f: S \to T$. Posmatrajmo skup $S' = S \setminus \{s_k\}$ i $T' = T \setminus \{f(s_k)\}$. Tada je $f|_{S'}$ preslikavanje sa $S'$ u $T'$, i $S'$ i $T'$ su veličina $k-1$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f$ jedan-na-jedan. Tada je $f|_{S'}$ također jedan-na-jedan. Prema indukcijskoj pretpostavci, $f|_{S'}$ je na. Sada za proizvoljni $t_i \in T$, ako je $t_i \in T'$ tada postoji neki $s_j \in S'$ takav da $f|_{S'}(s_j) = f(s_j) = t_i$, s obzirom da je $f|_{S'}$ na $T'$. Ako $t_i \notin T'$, tada $t_i$ mora biti jednak sa $f(s_k)$. Pa za proizvoljno $t_i \in T$ postoji neki $s_j \in S$ t.d. $f(s_j) = t_i$, pa je $f$ surjekcija (na $T$).

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $f$ na $T$. Neka je $f(s_i) = f(s_j)$. Ako su oba $s_i$ i $s_j$ elementi od $S'$, tada induktivna pretpostavka povlači da je $s_i = s_j$, s obzirom da je $f|_{S'}$ jedan-na-jedan. Ako oba $s_i$ i $s_j$ nisu u $S'$, tada je $s_i = s_k = s_j$. Ako $s_i \in S'$ i $s_j \notin S'$ tada $f(s_j) = f(s_k)$ i $f(s_k) \notin T'$. Ali $f(s_i) = f|_{S'}(s_i) \in T'$ pa $f(s_j) \neq f(s_i)$. Time, ako $f(s_i) = f(s_j)$, tada $s_i = s_j$ i $f$ je jedan-na-jedan.

Ako je f-ja sa konačnog skupa, $S$, na sebe, tada je to sigurno f-ja između konačnih skupova iste veličine. Pa ovo što smo pokazali povlači da je $f$ 1-1 ako i samo ako je na.

## Teorema

Neka je $\alpha$ permutacija konačnog skupa koja je napisana u obliku disjunktnih ciklusa. Tada je red permutacije $\alpha$ najmanji zajednički sadržalac dužina ciklusa.

**#** Odrediti red svake od sljedećih permutacija:

(a) $(124)(357)$

(b) $(124)(95367)$

(c) $(124)(35)$

(d) $(124)(357869)$

(e) $(1235)(24567)$

(f) $(345)(245)$

R:

(a) $|(124)(357)| = NZS(3,3) = 3$

(b) $|(124)(95367)| = NZS(3,5) = 15$

(c) $|(124)(35)| = NZS(3,2) = 6$

(d) $|(124)(357869)| = NZS(3,6) = 6$

(e) $|(1235)(24567)| =$

$= |(124)(3567)| = NZS(3,4) = 12$

(f) $|(345)(245)| =$

$= |(34)(52)| = NZS(2,2) = 2$

\# Odrediti red svake od sljedećih permutacija

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Rj.

(a) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right| = |(1\,2)(3\,5\,6)| = NZS(2,3) = 6$

(b) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right| = |(1\,7\,5\,3)(2\,6\,4)| = NZS(4,3) = 12$

\# Koliki je red proizvoda para disjunktnih ciklusa dužina 4 i 6?

Rj.

$NZS(4,6) = 12.$